

No.4 部分空間

この回のゴール

- 部分空間の定義を述べ、与えられた集合が部分空間かどうか判定できる。
- 同次方程式の解空間の基底と次元を求められる (次元 $= n - \text{rank } A$)。
- ベクトルで生成される部分空間 $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ の基底と次元を、行基本変形で求められる。
- 共通部分・和の次元の関係 (次元公式) を使える。

以下, V をベクトル空間とする。

1. 部分空間

No.1 の「確認のコツ」で, V の一部分を同じ演算で考えるときは, 零ベクトルを含むか・閉じているかを見ればよい, と述べた。これを正式に定義する。

定義 1 部分空間

V の部分集合 W が次の 3 条件を満たすとき, W を V の**部分空間** (線形部分空間) という。

- (i) $\mathbf{0} \in W$.
- (ii) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ ならば $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$. (和について閉じている)
- (iii) $\mathbf{a} \in W, c \in \mathbb{R}$ ならば $c\mathbf{a} \in W$. (スカラー倍について閉じている)

定理 1

V の部分空間 W は, V と同じ和・スカラー倍によって, それ自身ベクトル空間になる。

【証明】 (ii)(iii) より, 和とスカラー倍の結果は W の中に入る. (V1)(V2)(V5)~(V8) は V の中で成り立つ等式なので, W の要素についても成り立つ. (V3) は (i) から. (V4): $\mathbf{a} \in W$ なら (iii) より $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a} \in W$ (No.1 定理 1 (6)). $\square$

注意

- (i) は「 W が空集合でない」に置きかえてもよい. $\mathbf{a} \in W$ が 1 つでもあれば, (iii) で $c = 0$ として $\mathbf{0} = 0\mathbf{a} \in W$ となるから.
- 実際の判定では, **まず $\mathbf{0}$ を含むか**を見るとよい. 含まなければその時点で部分空間でない.

例 1 部分空間の例

- (a) $\{0\}$ と V 自身は、いつでも V の部分空間.
- (b) $\mathbb{R}^3$ の、原点を通る直線や平面.
- (c) $M_{2,2}(\mathbb{R})$ の対称行列全体 $\{A \mid {}^tA = A\}$. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B$, ${}^t(cA) = c {}^tA = cA$ (第1章 No.1 定理 2).
- (d) $\mathbb{R}[x]_2$ の $\{f \mid f(1) = 0\}$ (No.1 練習問題 1 (d)).
- (e) $\mathbb{R}[x]_n$ は $\mathbb{R}[x]$ の部分空間.

例 2 部分空間でない例

$\mathbb{R}^2$ の $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$ (0 を含まない), $\{(x, y) \mid xy = 0\}$ (和について閉じていない), $M_{2,2}(\mathbb{R})$ の正則行列全体 (0 を含まない).

■ 2. 部分空間の2つの代表例

定理 2 解空間

A を $m \times n$ 行列とする. 同次方程式 $Ax = 0$ の解全体

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である. これを $Ax = 0$ の解空間という.

【証明】 $A0 = 0$ より (i). (ii)(iii) は第2章 No.3 定理 3 (重ね合わせ) そのもの. □

注意

非同次方程式 $Ax = b$ ($b \neq 0$) の解全体は部分空間でない. 0 が解でないからである. 解が存在しない場合 (解集合が空集合) もある. 解が存在する場合は, 解集合は同次方程式 $Ax = 0$ の解空間を, 特殊解だけ平行移動した集合になる (第2章 No.3 定理 4).

定理 3 生成される部分空間

$a_1, \dots, a_k \in V$ の1次結合全体 $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ は V の部分空間である. しかも, $a_1, \dots, a_k$ を含む部分空間のうちで最小のものである.

【証明】 $0 = 0a_1 + \dots + 0a_k$. $\sum c_i a_i + \sum d_i a_i = \sum (c_i + d_i) a_i$, $c \sum c_i a_i = \sum (cc_i) a_i$ も1次結合. よって部分空間.

最小性: $a_1, \dots, a_k$ を含む部分空間 U は, (ii)(iii) をくり返し使うとそれらの1次結合をすべて含むので, $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \subset U$. □

$\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ を, $a_1, \dots, a_k$ で生成される部分空間 (張られる部分空間) という. No.2・No.3 で使ってきた記号が, ここで部分空間として位置づけられた.

■ 3. 部分空間の次元

定理 4 部分空間の次元

$\dim V = n$ とし, W を V の部分空間とする.

(1) W も有限次元で, $\dim W \leq n$.

(2) $\dim W = n$ ならば $W = V$.

【証明】(1) W の 1 次独立なベクトルは V でも 1 次独立なので, No.3 定理 3 より高々 n 本. $W = \{\mathbf{0}\}$ なら $\dim W = 0$. そうでなければ, W の中で 1 次独立な組をできるだけ多く選ぶ (本数は n 以下). それを $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$ とすると, どの $\mathbf{w} \in W$ を付け加えても 1 次従属になるので, No.2 定理 3 より $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r \rangle$. よって $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r)$ は W の基底で, $\dim W = r \leq n$.

(2) W の基底は V の n 本の 1 次独立なベクトルなので, No.3 定理 5 (1) より V の基底でもある. よって $W = V$. □

コラム: $\mathbb{R}^3$ の部分空間をすべて挙げる

定理 4 より, $\mathbb{R}^3$ の部分空間の次元は 0, 1, 2, 3 のどれか.

- 0 次元: $\{\mathbf{0}\}$. 1 次元: 原点を通る直線. 2 次元: 原点を通る平面. 3 次元: $\mathbb{R}^3$ 全体.

$\mathbb{R}^3$ の部分空間は, この 4 種類しかない.

■解空間の次元 第2章で予告した「解の自由度」が, ここで解空間の次元として確定する.

定理 5 解空間の次元

A を $m \times n$ 行列とする. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間 W について, 第2章 No.3 の方法で求めた基本解 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ は W の基底であり,

$$\dim W = n - \text{rank } A.$$

【証明】解はすべて $t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$ と書けるので, 基本解は W を生成する. 1 次独立性: $\mathbf{v}_i$ は「 i 番目のパラメータの位置 (主成分のない列に対応する成分) だけ 1, 他のパラメータの位置は 0」である. $t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ なら, i 番目のパラメータの位置の成分を見て $t_i = 0$. 基本解の個数は主成分のない列の個数 $n - \text{rank } A$ に等しい. □

例題 1

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{array} \right. \right\} \text{ の基底と次元を求めよ. }$$

【解答】第2章 No.3 例題 1 の同次方程式である. 基本解

$$\mathbf{v}_1 = {}^t(-2, 1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = {}^t(-1, 0, 2, 1)$$

が基底で, $\dim W = 2$ ($= 4 - \text{rank } A = 4 - 2$).

■生成される部分空間の基底 $\mathbb{R}^m$ のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が生成する部分空間 $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ の基底は, 余分なベクトルを取り除けば得られる. どれが余分かは, 行基本変形で分かる.

定理 6 生成される部分空間の基底

$A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_k)$ を行基本変形して簡約階段行列 R にしたとき, R で主成分のある列の番号に対応する $\mathbf{a}_j$ たちは $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ の基底になる. 特に

$$\dim \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle = \text{rank } A.$$

【証明】 行基本変形で $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ の解は変わらないので, A の列の間の 1 次関係と, R の列の間の 1 次関係はまったく同じである. R の主成分のある列は $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ ($r = \text{rank } A$) なので 1 次独立で, 主成分のない列はそれらの 1 次結合である. 同じことが A の対応する列についても成り立つ. よって主成分のある列に対応する $\mathbf{a}_j$ は 1 次独立で, 残りの $\mathbf{a}_j$ はそれらの 1 次結合. したがって, それらは $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ を生成し, 基底になる. $\square$

例題 2

$\mathbf{a}_1 = {}^t(1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = {}^t(2, 4, 2)$, $\mathbf{a}_3 = {}^t(-1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_4 = {}^t(3, 0, -3)$ とする. $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ の基底と次元を求め, 基底に入らないベクトルを基底の 1 次結合で表せ.

【解答】 $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$ は第 1 章 No.4 例題 1 の行列で, その簡約階段行列は

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

主成分は第 1 列と第 3 列にあるので, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$ が W の基底で, $\dim W = 2$. R の第 2 列 $= 2 \times (\text{第 1 列})$, 第 4 列 $= 1 \times (\text{第 1 列}) - 2 \times (\text{第 3 列})$ なので,

$$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3.$$

注意

基底として取り出すのは元の行列 A の列 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ であって, R の列ではない. 行基本変形で列ベクトルそのものは変わってしまうが, 列の間の 1 次関係は変わらない, というのがポイントである.

■ 4. 共通部分と和**定理 7**

W_1, W_2 を V の部分空間とする. 次の 2 つも V の部分空間である.

$$W_1 \cap W_2, \quad W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}.$$

$W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の和空間という.

【証明】 $W_1 \cap W_2 : \mathbf{0}$ は両方に入る. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が両方に入れば, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $c\mathbf{a}$ も両方に入る.

$$W_1 + W_2 : \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}. (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + (\mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2) = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}'_1) + (\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}'_2), \quad c(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = c\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2.$$

$\square$

注意

和集合 $W_1 \cup W_2$ は一般に部分空間ではない (練習問題 6). $W_1 + W_2$ は「 $W_1 \cup W_2$ を含む最小の部分空間」である. また, $W_1 = \langle \mathbf{a}_1, \dots \rangle$, $W_2 = \langle \mathbf{b}_1, \dots \rangle$ なら $W_1 + W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}_1, \dots \rangle$.

定理 8 次元公式

W_1, W_2 を有限次元のベクトル空間 V の部分空間とすると

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

【証明】 $W_1 \cap W_2$ の基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ をとり, No.3 定理 5 (3) で W_1 の基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ と W_2 の基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t$ に延長する. $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t$ が $W_1 + W_2$ の基底であることを示せば, $\dim(W_1 + W_2) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r$ となって証明が終わる.

生成: $W_1 + W_2$ の要素は W_1 の要素と W_2 の要素の和なので, これらの 1 次結合で書ける.

1 次独立: $\sum a_i \mathbf{u}_i + \sum b_j \mathbf{v}_j + \sum c_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ とする. $\mathbf{y} = \sum c_k \mathbf{w}_k$ とおくと $\mathbf{y} \in W_2$ で, $\mathbf{y} = -\sum a_i \mathbf{u}_i - \sum b_j \mathbf{v}_j \in W_1$. よって $\mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$ で, $\mathbf{y} = \sum d_i \mathbf{u}_i$ と書ける. すると $\sum d_i \mathbf{u}_i - \sum c_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ で, これは W_2 の基底の 1 次関係なので $c_k = 0$ ($d_i = 0$). 残りは $\sum a_i \mathbf{u}_i + \sum b_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ で, W_1 の基底の 1 次関係なので $a_i = b_j = 0$. $\square$

例題 3

$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1 = \langle {}^t(1, 0, 1, 0), {}^t(0, 1, 0, 1) \rangle$, $W_2 = \langle {}^t(1, 1, 0, 0), {}^t(0, 0, 1, 1) \rangle$ について, $W_1 + W_2$ と $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ.

【解答】 4 本を順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ とする. 並べた行列を簡約すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

主成分は第 1~3 列なので, $W_1 + W_2$ の基底は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$ で, $\dim(W_1 + W_2) = 3$. $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ (それぞれ 2 本は 1 次独立) なので, 次元公式より $\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

第 4 列の関係から $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1$, つまり $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = {}^t(1, 1, 1, 1)$. このベクトルは W_1 にも W_2 にも入り, $\mathbf{0}$ でないので, $W_1 \cap W_2 = \langle {}^t(1, 1, 1, 1) \rangle$.

コラム: 直和

$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ のとき, 和空間を直和といい $W_1 \oplus W_2$ と書く. このとき $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ で, 和空間の各ベクトルは $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ とただ 1 通りに分解できる. たとえば第 1 章 No.1 練習問題 8 で見た「正方行列 = 対称行列 + 交代行列」の分解は, $M_{n,n}(\mathbb{R})$ の直和分解である.

■ 練習問題

1. 次の集合は部分空間か. 理由とともに答えよ.

(a) $\mathbb{R}^3$ の $\{^t(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$

(b) $\mathbb{R}^3$ の $\{^t(x, y, z) \mid x \geq 0\}$

(c) $\mathbb{R}^3$ の $\{^t(x, y, z) \mid x = y = z\}$

(d) $\mathbb{R}^2$ の $\{^t(x, y) \mid y = x^2\}$

(e) $M_{2,2}(\mathbb{R})$ の上三角行列全体

2. 解空間 $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ の基底と次元を求めよ.

3. $a_1 = {}^t(1, 2, 0, 1)$, $a_2 = {}^t(2, 1, 1, 0)$, $a_3 = {}^t(0, 3, -1, 2)$, $a_4 = {}^t(1, -1, 1, -1)$ とする. $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ の基底と次元を求め, 基底に入らないベクトルを基底の 1 次結合で表せ.

4. $W = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \text{tr } A = 0\}$ は部分空間であることを示し, 基底と次元を求めよ.

5. $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1 = \langle {}^t(1, 1, 0), {}^t(0, 1, 1) \rangle$, $W_2 = \langle {}^t(1, 0, 1), {}^t(0, 1, -1) \rangle$ について, $\dim(W_1 + W_2)$ と $\dim(W_1 \cap W_2)$ を求め, $W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ.

6. (考えてみよう) W_1, W_2 を V の部分空間とする. $W_1 \cup W_2$ が部分空間になるのは, $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ のときに限ることを示せ.

■ 練習問題の解答

1. (a) 部分空間. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = 0$ の解空間 (定理 2). (b) 部分空間でない. ${}^t(1, 0, 0)$ を -1 倍すると外に出る. (c) 部分空間. $\langle {}^t(1, 1, 1) \rangle$ に等しい (定理 3). (d) 部分空間でない. ${}^t(1, 1)$ は入るが, 2 倍の ${}^t(2, 2)$ は $2 \neq 2^2$ で入らない. (e) 部分空間. 上三角行列の和・スカラー倍は上三角行列で, O も上三角行列.

2. 第 2 章 No.3 練習問題 1 (2) より, 基本解 ${}^t(1, 1, 0, 0)$, ${}^t(1, 0, -1, 1)$ が基底. $\dim W = 2 (= 4 - 2)$.

3. $A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)$ を簡約すると, 第 1 行 $(1, 0, 2, -1)$, 第 2 行 $(0, 1, -1, 1)$, 第 3・4 行は零行になる. 基底は (a_1, a_2) , 次元は 2. $a_3 = 2a_1 - a_2$, $a_4 = -a_1 + a_2$.

4. $\text{tr } O = 0$, $\text{tr}(A+B) = \text{tr } A + \text{tr } B$, $\text{tr}(cA) = c \text{tr } A$ より部分空間. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}$ と書けるので, $(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21})$ が W を生成する. 1 次独立も成分を比べて分かる. よって基底は $(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21})$, $\dim W = 3$.

5. 4 本を並べた行列のランクは 3 なので $\dim(W_1 + W_2) = 3$ (つまり $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$). $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ より $\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$. ${}^t(1, 0, 1) + {}^t(0, 1, -1) = {}^t(1, 1, 0)$ なので, ${}^t(1, 1, 0)$ は W_1 にも W_2 にも入る. よって $W_1 \cap W_2 = \langle {}^t(1, 1, 0) \rangle$.

6. $W_1 \subset W_2$ なら $W_1 \cup W_2 = W_2$ で部分空間 (逆も同様). 逆に, どちらも他方に含まれないとすると, $a \in W_1 \setminus W_2$, $b \in W_2 \setminus W_1$ がとれる. もし $a+b \in W_1$ なら $b = (a+b) - a \in W_1$ となり矛盾. W_2 に入るとしても同様に矛盾. よって $a+b \notin W_1 \cup W_2$ で, $W_1 \cup W_2$ は和について閉じていない.